1

실수와 그 계산

우리는 일상생활에서 자주 접하는 유리수가 정수이거나, 유한소수 또는 순환소수임을 알고 있다. 한편, $\pi=3.14159265\cdots$와 같이 순환소수가 아닌 무한소수가 있는 것도 알고 있다.

고대 그리스 사람들은 유리수를 사용하여 자연의 모든 현상을 파악하고 설명하려고 시도하였으나 유리수가 아닌 수의 존재를 발견하였다. 이후, 19세기 말 유리수뿐 아니라 순환소수가 아닌 무한소수도 포함하는 실수의 체계가 확립되었다.

[출처: H. Eves(이우영 · 신항균 역), 『수학사』]

이 단원에서는 제곱근의 뜻과 그 사칙계산, 무리수와 실수에 대하여 알아본다.

준비해 볼까?

1 다음 수를 제곱하시오.

(1) 3 (2) -4 (3) $\frac{7}{2}$ (4) 0.1

2 다음 수를 소인수분해하시오.

(1) 18 (2) 24 (3) 72 (4) 112

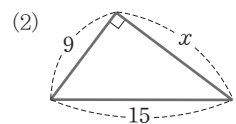
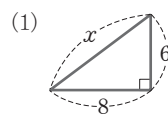
3 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $4x+7x$ (2) $5a-a$

(3) $(x-1)+(2x+3)$ (4) $(2a+6b)-(3a-b)$

4 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1)

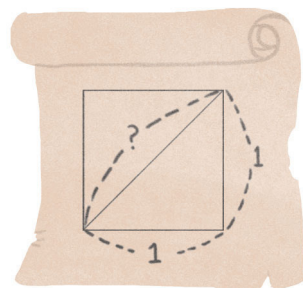
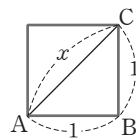
(2)

1.0 비밀에 부쳐지길 원했던 수

피타고라스 정리를 밝힌 피타고라스학파는 모든 수를 유리수로 나타낼 수 있다고 믿었습니다. 그런데 그들은 한 변의 길이가 1인 정사각형에서 대각선의 길이를 유리수로 나타낼 수 없다는 사실을 깨닫게 되었고 이 사실이 비밀에 부쳐지길 원했습니다.

그러나 유리수가 아닌 수가 존재한다는 것은 결국 세상에 알려지게 되었고, 세월이 지나면서 생활 주변과 자연에서 이러한 수가 다양하게 나타남을 알게 되었습니다.

예를 들어 유리수가 아닌 수는 한 모서리의 길이가 1인 정육면체의 대각선의 길이, 반지름의 길이가 1인 원의 넓이, 반지름의 길이가 1인 구의 부피 등에서 나타납니다. 또한, 건축물을 세우거나 우주선을 쏘아 올리는 일, 나아가 자연과학의 성질이나 법칙의 많은 부분에서도 유리수가 아닌 수를 활용하고 있습니다.

오늘날 유리수뿐 아니라 유리수가 아닌 수도 우리 생활을 윤택하게 하고 과학 문명을 발전시키는 데 중요한 요소가 되었습니다.

[출처: H. Eves (이우영 · 신항균 역), 『수학사』]

● 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이를 x라고 할 때, △ABC에서 세 변의 길이 사이의 관계를 x에 관한 식으로 나타내 보자.

태도 및 실천

● 유리수가 아닌 수가 사용된 예를 조사하여 말해 보자.

1.1 제곱근의 뜻

학|습|목|표

- 제곱근의 뜻을 안다.
- 제곱근을 구할 수 있다.

학|습|요|소

- 제곱근, 근호, $\sqrt{}$

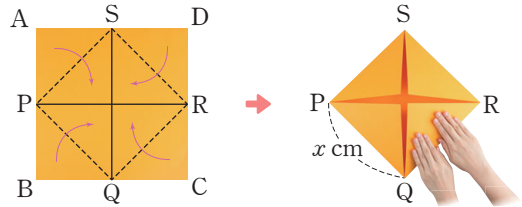
생각 열기

정사각형의 한 변의 길이

수학➕미술

다음을 보고 방석 접기를 이용하여 만들어진 색종이의 한 변의 길이를 생각해 봅시다.

방석 접기: 정사각형 모양의 종이를 두 쌍의 대변이 각각 겹치게 접어서 편 후, 두 접힌 선의 교점에 네 꼭짓점이 모이게 접는 방법

활동 1 오른쪽 그림과 같이 넓이가 $100\ \mathrm{cm}^2$인 정사각형 ABCD의 넓이와 한 변의 길이 사이의 관계를 식으로 나타내 보자.

활동 2 정사각형 PQRS의 넓이와 한 변의 길이 사이의 관계를 x에 관한 식으로 나타내 보자.

생각 1

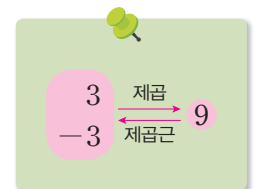
정사각형의 넓이와 한 변의 길이 사이에는 어떤 관계가 있나요?

생각 열기에서 넓이가 $100\ \mathrm{cm}^2$인 정사각형의 넓이와 한 변의 길이 사이의 관계를 식으로 나타내면 $10^2=100$이다. 한편, 한 변의 길이가 x cm인 정사각형 PQRS의 넓이는 $100\ \mathrm{cm}^2$의 반인 $50\ \mathrm{cm}^2$이다. 따라서 $x^2=50$이다.

직각삼각형 PBQ에서 두 변 PB와 BQ의 길이가 모두 5 cm이므로 피타고라스 정리를 이용하여 $x^2=5^2+5^2$으로 구할 수도 있다.

이와 같이 어떤 수 x를 제곱하여 a가 될 때, 즉 $x^2=a$일 때, x를 a의 **제곱근**이라고 한다.

예를 들어 $3^2=9$이므로 3은 9의 제곱근이다. 또한, $(-3)^2=9$이므로 -3도 9의 제곱근이다. 즉, 9의 제곱근은 3과 -3이다.

3, −3	제곱 → / ← 제곱근	9

한편, 양수나 음수를 제곱하면 항상 양수이므로 음수의 제곱근은 생각하지 않는다. 또, 제곱하여 0이 되는 수는 0뿐이므로 0의 제곱근은 0이다.

문제 1 다음 수의 제곱근을 구하시오.

(1) 25　　(2) 64　　(3) 0.04　　(4) $\frac{49}{36}$

생각 2 양수 a의 제곱근을 어떻게 나타낼 수 있나요?

양수 a의 제곱근은 양수와 음수 2개가 있고, 그 두 수의 절댓값은 서로 같다.

양수 a의 제곱근 중에서 양수인 것을 양의 제곱근, 음수인 것을 음의 제곱근이라 하고, 기호 $\sqrt{\ }$를 사용하여

양의 제곱근을 $\sqrt{a}$, 음의 제곱근을 $-\sqrt{a}$

와 같이 나타낸다. 또, $\sqrt{a}$와 $-\sqrt{a}$를 한꺼번에 $\pm\sqrt{a}$로 나타내기도 한다.

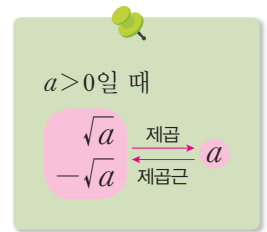
이때 기호 $\sqrt{\ }$를 **근호**라 하고, $\sqrt{a}$를 '제곱근 a' 또는 '루트 a'라고 읽는다.

$a>0$일 때

$\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$ —제곱→ a, a —제곱근→ $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$

기호 $\sqrt{\ }$는 뿌리(root)를 뜻하는 라틴어 radix의 첫 글자 r를 변형한 것이다.

$\pm\sqrt{a}$를 '플러스 마이너스 루트 a'라고 읽는다.

예 5의 양의 제곱근은 $\sqrt{5}$, 음의 제곱근은 $-\sqrt{5}$이므로 5의 제곱근은 $\pm\sqrt{5}$이다.

문제 2 다음 수의 제곱근을 근호 $\sqrt{\ }$를 사용하여 나타내시오.

(1) 3　　(2) 7　　(3) 0.1　　(4) $\frac{11}{5}$

문제 3 다음을 근호 $\sqrt{\ }$를 사용하여 나타내시오.

(1) 6의 양의 제곱근　　(2) 3.7의 음의 제곱근

(3) 제곱근 15　　(4) 제곱근 $\frac{5}{6}$

25의 제곱근을 근호를 사용하여 나타내면 $\sqrt{25}$와 $-\sqrt{25}$이다.

그런데 제곱하여 25가 되는 양수는 5, 음수는 -5이므로 25의 양의 제곱근은 5, 음의 제곱근은 -5이다. 따라서 $\sqrt{25}=5$, $-\sqrt{25}=-5$임을 알 수 있다.

이와 같이 어떤 양수의 제곱근은 근호를 사용하지 않고 나타낼 수도 있다.

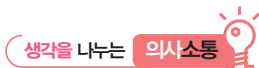
다음 수를 근호 $\sqrt{\ }$ 를 사용하지 않고 나타내시오.

(1) $\sqrt{81}$ (2) $-\sqrt{0.16}$

풀이 | (1) $9^2=81$, $(-9)^2=81$이므로 81의 제곱근은 9, -9이다.
그런데 $\sqrt{81}$은 81의 양의 제곱근이므로 $\sqrt{81}=9$이다.
(2) $0.4^2=0.16$, $(-0.4)^2=0.16$이므로 0.16의 제곱근은 0.4, -0.4이다.
그런데 $-\sqrt{0.16}$은 0.16의 음의 제곱근이므로 $-\sqrt{0.16}=-0.4$이다.

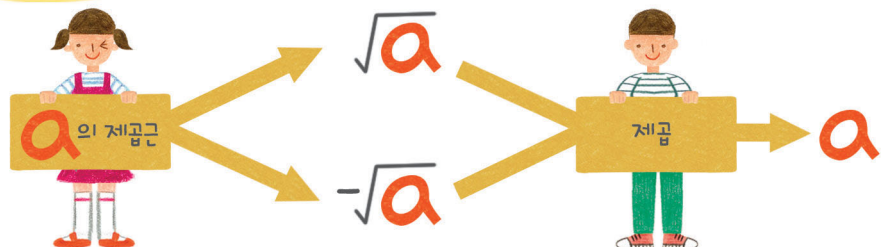
답 (1) 9 (2) -0.4

문제 4 다음 수를 근호 $\sqrt{\ }$ 를 사용하지 않고 나타내시오.

(1) $\sqrt{4}$ (2) $-\sqrt{49}$ (3) $\sqrt{0.01}$ (4) $-\sqrt{\dfrac{9}{100}}$

다음 대화를 읽고, 2의 제곱근과 제곱근 2의 차이점에 대하여 이야기해 보자.

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

1

다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 제곱하여 a가 되는 수를 a의 $\square$이라고 한다.

(2) 기호 $\sqrt{\ }$를 사용하여 양수 a의 양의 제곱근을 $\square$, 음의 제곱근을 $\square$와 같이 나타낸다.

(3) 기호 $\sqrt{\ }$를 $\square$라 하고, $\sqrt{a}$를 '$\square$' 또는 '루트 a'라고 읽는다.

2

다음 수의 제곱근을 구하시오.

(1) 1　　(2) 121

(3) 0.36　　(4) $\dfrac{1}{81}$

3

다음 수의 제곱근을 근호 $\sqrt{\ }$를 사용하여 나타내시오.

(1) 5　　(2) 11

(3) 1.7　　(4) $\dfrac{2}{3}$

4

다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르시오.

보기

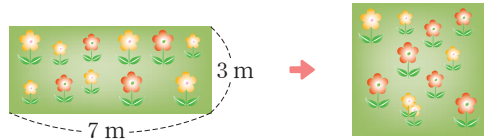
ㄱ. 0의 제곱근은 없다.

ㄴ. 3의 음의 제곱근은 $-\sqrt{3}$이다.

ㄷ. $\sqrt{16}$의 제곱근은 2이다.

ㄹ. 넓이가 5인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

5 추론

가로의 길이가 7 m, 세로의 길이가 3 m인 직사각형 모양의 꽃밭이 있다. 이 꽃밭과 넓이가 같은 정사각형 모양의 꽃밭을 만들려고 할 때, 정사각형 모양의 꽃밭의 한 변의 길이는 몇 m인지 구하시오.

6 과정을 다지는 문제

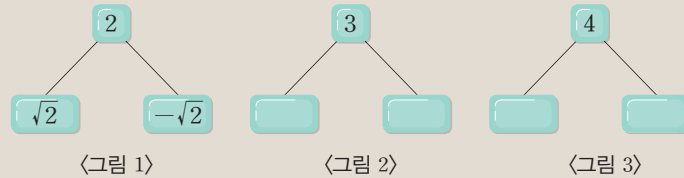
49의 양의 제곱근을 a, $\sqrt{625}$의 음의 제곱근을 b라고 할 때, $a+b$의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

1.2 제곱근의 성질과 대소 관계

학|습|목|표

- 제곱근의 성질을 이해한다.
- 제곱근의 크기를 비교할 수 있다.

제곱근의 성질은?

다음에서 〈그림 1〉은 2의 제곱근 $\sqrt{2}$와 $-\sqrt{2}$를 나타낸 것입니다.
제곱근을 각각 제곱하면 어떤 수가 되는지 생각해 봅시다.

〈그림 1〉 〈그림 2〉 〈그림 3〉

활동 1 〈그림 2〉, 〈그림 3〉에서 주어진 수의 제곱근을 빈칸에 써넣어 보자.

활동 2 **활동 1**에서 구한 제곱근을 각각 제곱하면 어떤 수가 되는지 말해 보자.

생각 1 $\sqrt{(-2)^2}$**을 간단히 나타낼 수 있나요?**

생각 열기에서 2의 제곱근은 $\sqrt{2}$와 $-\sqrt{2}$이므로

$$(\sqrt{2})^2=2,\ (-\sqrt{2})^2=2$$

이다. 일반적으로 양수 a의 제곱근은 $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$이므로 다음이 성립한다.

$$(\sqrt{a})^2=a,\ (-\sqrt{a})^2=a$$

한편, $2^2=4$, $(-2)^2=4$이고, 4의 양의 제곱근은 2이므로

$$\sqrt{2^2}=\sqrt{4}=2,\ \sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$$

이다. 일반적으로 a가 양수일 때, 다음이 성립한다.

$$\sqrt{a^2}=a,\ \sqrt{(-a)^2}=a$$

위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

$a>0$일 때, $\sqrt{(-a)^2}$을 $-a$로 생각하지 않도록 주의한다.

제곱근의 성질

$a>0$일 때

1. $(\sqrt{a})^2=a$, $(-\sqrt{a})^2=a$

2. $\sqrt{a^2}=a$, $\sqrt{(-a)^2}=a$

예 (1) $(\sqrt{5})^2=5$, $(-\sqrt{5})^2=5$　　(2) $\sqrt{1.6^2}=1.6$, $\sqrt{(-1.6)^2}=1.6$

문제 1 다음을 간단히 나타내시오.

(1) $(\sqrt{13})^2$　(2) $\left(-\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^2$　(3) $\sqrt{1.7^2}$　(4) $-\sqrt{(-2)^2}$

다음을 계산하시오.

(1) $(\sqrt{7})^2-\sqrt{(-3)^2}$　　(2) $\sqrt{16}\times(-\sqrt{2})^2$

풀이 | (1) $(\sqrt{7})^2-\sqrt{(-3)^2}=7-3=4$

(2) $\sqrt{16}\times(-\sqrt{2})^2=\sqrt{4^2}\times(-\sqrt{2})^2=4\times2=8$

답 (1) 4　(2) 8

문제 2 다음을 계산하시오.

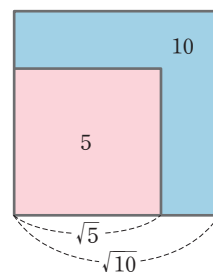
(1) $(\sqrt{4})^2+(-\sqrt{10})^2$　　(2) $\sqrt{9}-\sqrt{(-2)^2}$

(3) $(\sqrt{6})^2\times\sqrt{25}$　　(4) $\sqrt{\frac{1}{36}}\div\left(-\sqrt{\frac{49}{9}}\right)$

생각 2 제곱근의 크기는 어떻게 비교하나요?

오른쪽 그림은 넓이가 각각 5, 10인 두 정사각형을 겹쳐 놓은 것이고, 두 정사각형의 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$이다.

이때 두 정사각형에서 넓이가 더 넓은 것이 그 한 변의 길이도 더 길므로 $5<10$이면 $\sqrt{5}<\sqrt{10}$임을 알 수 있다.

또, 두 정사각형에서 한 변의 길이가 더 긴 것이 그 넓이도 더 넓으므로 $\sqrt{5}<\sqrt{10}$이면 $5<10$임을 알 수 있다.

일반적으로 제곱근의 대소 관계에서는 다음이 성립한다.

제곱근의 대소 관계

$a>0$, $b>0$일 때

1. $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$　　**2.** $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $a<b$

다음 두 수의 대소를 비교하시오.

(1) 3, $\sqrt{10}$　　(2) $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$

배웠어요!

부등식의 양변에 같은 음수를 곱하면 부등호의 방향이 바뀐다.

풀이 | (1) $3=\sqrt{3^2}=\sqrt{9}$이고, $9<10$이므로 $\sqrt{9}<\sqrt{10}$이다.

따라서 $3<\sqrt{10}$이다.

(2) $3<5$이므로 $\sqrt{3}<\sqrt{5}$이다.

따라서 $-\sqrt{3}>-\sqrt{5}$이다.

답 (1) $3<\sqrt{10}$　(2) $-\sqrt{3}>-\sqrt{5}$

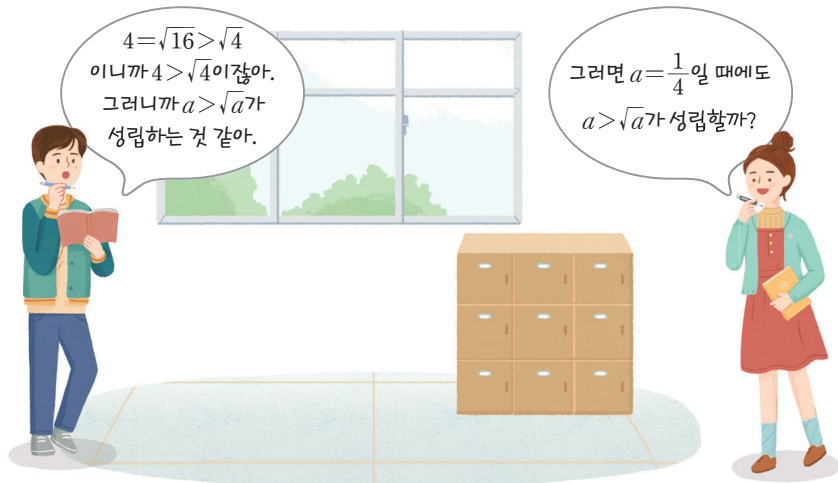
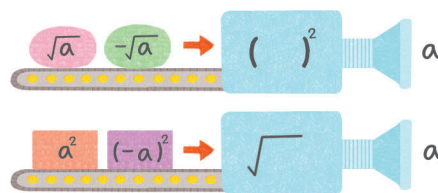
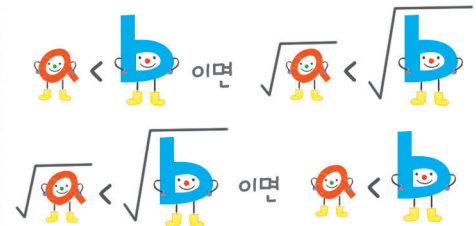
문제 3 다음 두 수의 대소를 비교하시오.

(1) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$　(2) 5, $\sqrt{13}$　(3) $\sqrt{0.1}$, 0.2　(4) -2, $-\sqrt{3}$

다음 대화를 읽고, $a>0$일 때 $a>\sqrt{a}$가 항상 성립하는지 이야기해 보자.

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

1

다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $a>0$일 때

$(\sqrt{a})^2=\square$, $(-\sqrt{a})^2=\square$이고,

$\sqrt{a^2}=\square$, $\sqrt{(-a)^2}=\square$이다.

(2) $a>0$, $b>0$일 때

$a<b$이면 $\sqrt{a}\square\sqrt{b}$이고,

$\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $a\square b$이다.

2

다음을 간단히 나타내시오.

(1) $(\sqrt{15})^2$

(2) $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$

(3) $-\sqrt{1.69}$

(4) $-\sqrt{(-7)^2}$

3

다음을 계산하시오.

(1) $\sqrt{9^2}+\sqrt{(-11)^2}$

(2) $(\sqrt{13})^2-(-\sqrt{14})^2$

(3) $(-\sqrt{5})^2\times\sqrt{\frac{9}{25}}$

(4) $\sqrt{64}\div(-\sqrt{4^2})$

4

다음 두 수의 대소를 비교하시오.

(1) $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$

(2) $\sqrt{0.8}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$

(3) 5, $\sqrt{22}$

(4) $-\sqrt{7}$, -3

5

$\sqrt{22-x}$가 자연수가 되게 하는 가장 큰 자연수 x의 값을 구하시오.

6 추론

$2<\sqrt{5x}<4$를 만족시키는 자연수 x의 값을 모두 구하시오.

7 과정을 다지는 문제

$a-b<0$, $ab<0$일 때, 제곱근의 성질을 이용하여 $\sqrt{a^2}+(-\sqrt{b})^2-\sqrt{(-2a)^2}$을 간단히 하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

1.3 무리수와 실수

학습 목표

- 무리수와 실수의 개념을 이해한다.
- 실수를 수직선 위에 나타낼 수 있다.
- 제곱근표와 계산기를 이용하여 제곱근의 값을 구할 수 있다.

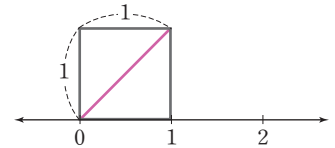
학습 요소

- 무리수, 실수

창문 통과하기

준비물: 컴퍼스

한 변의 길이가 1 m인 정사각형 모양의 창문으로 가로의 길이가 2 m, 세로의 길이가 1.3 m인 직사각형 모양의 얇은 나무판자를 통과시키려고 합니다. 나무판자가 창문을 통과하려면 나무판자의 세로의 길이가 창문의 대각선의 길이보다 더 짧아야 합니다. 나무판자가 창문을 통과할 수 있는지 생각해 봅시다.

활동 1 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형에서 대각선의 길이를 구해 보고, 컴퍼스를 이용하여 그 길이를 수직선 위에 나타내 보자.

활동 2 $1.3^2=1.69<2$임을 이용하여 1.3과 $\sqrt{2}$의 크기를 비교해 보고, 나무판자가 창문을 통과할 수 있는지 판단해 보자.

생각 1

나무판자는 창문을 통과할 수 있나요?

생각 열기에서 창문의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$ m이고, $1.3<\sqrt{2}$이므로 나무판자가 창문을 통과할 수 있음을 알 수 있다.

이제 제곱근의 대소 관계를 이용하여 $\sqrt{2}$의 값을 소수로 나타내 보자.

$1<2<4$이므로 $\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}$, 즉

$$1<\sqrt{2}<2$$

이다. 또, $1.4^2=1.96$, $1.5^2=2.25$이므로

$$1.4^2<2<1.5^2$$

$$1.4<\sqrt{2}<1.5$$

이다. 마찬가지로 $1.41^2=1.9881$, $1.42^2=2.0164$ 이므로

$$1.41^2<2<1.42^2$$
$$1.41<\sqrt{2}<1.42$$

이다. 이와 같은 방법으로 계속하면 다음과 같다.

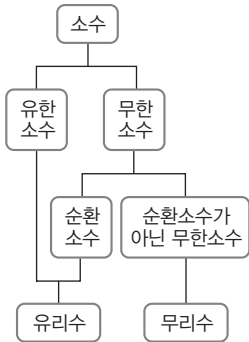
$$1.414<\sqrt{2}<1.415$$
$$1.4142<\sqrt{2}<1.4143$$
$$\vdots$$

$\sqrt{2}$를 소수로 나타내면

$$\sqrt{2}=1.41421356237309504880 1\cdots$$

과 같이 순환소수가 아닌 무한소수임이 알려져 있다.

$\sqrt{2}$와 같이 순환소수가 아닌 무한소수로 나타낼 수 있는 수를 **무리수**라고 한다. 즉, 무리수는 유리수가 아닌 수이다.

정수가 아닌 유리수는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다. 또, 유한소수와 순환소수로 나타낼 수 있는 수는 유리수이다. 즉,

예 (1) $\sqrt{3}=1.732050807568877\cdots$, $\sqrt{5}=2.236067977499789\cdots$, $\pi=3.141592653589793\cdots$은 모두 순환소수가 아닌 무한소수임이 알려져 있으므로 무리수이다.

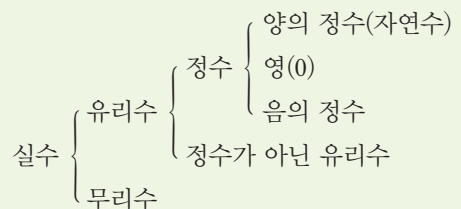
(2) $1+\sqrt{2}=1+1.41421356\cdots=2.41421356\cdots$은 순환소수가 아닌 무한소수이므로 무리수이다.

근호를 사용하여 나타낸 수 중에서 $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$, $-\sqrt{9}=-\sqrt{3^2}=-3$, $\sqrt{\frac{16}{25}}=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$, …와 같이 근호 안의 수가 어떤 유리수의 제곱이 되는 수는 유리수이다. 그러나 $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{2}{5}}$, $\sqrt{0.9}$, …와 같이 근호 안의 수가 유리수의 제곱이 되지 않는 수는 무리수이다.

문제 1 다음 수 중에서 무리수를 모두 찾으시오.

(1) $\sqrt{12}$ (2) $-\sqrt{36}$ (3) $1+\sqrt{4}$ (4) $1-\sqrt{3}$

유리수와 무리수를 통틀어 **실수**라고 한다. 이제부터 수라고 하면 실수를 의미한다.

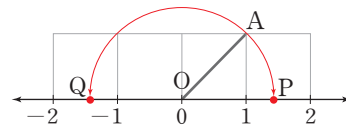
실수를 분류하면 오른쪽과 같다.

생각 2

중1 배웠어요!

모든 유리수는 수직선 위에 점으로 나타낼 수 있다.

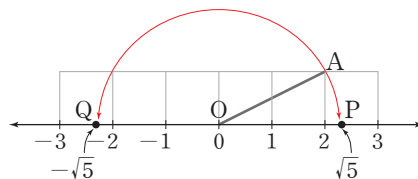
무리수를 수직선 위에 어떻게 나타낼 수 있나요?

오른쪽 그림에서 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. 피타고라스 정리에 의해 $\overline{OA}^2=1^2+1^2=2$이므로 대각선인 $\overline{OA}$의 길이는 $\sqrt{2}$이다. 이때 원점 O를 중심으로 하고 $\overline{OA}$를 반지름으로 하는 원을 그려 수직선과 만나는 점을 각각 P, Q라고 하면 두 점 P, Q에 대응하는 수는 각각 $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$이다.

이와 같이 수직선 위에는 유리수에 대응하는 점들뿐만 아니라 무리수에 대응하는 점들도 존재한다.

일반적으로 수직선은 유리수와 무리수에 대응하는 점들로 완전히 메울 수 있음이 알려져 있다. 즉, 수직선 위의 각 점에 실수를 하나씩 대응시킬 수 있다.

예제 1

오른쪽 그림에서 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. $\sqrt{5}$와 $-\sqrt{5}$에 대응하는 점을 수직선 위에 각각 나타내시오.

풀이 | 오른쪽 그림에서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{OA}^2=2^2+1^2=5$이므로 $\overline{OA}=\sqrt{5}$이다. 이때 원점 O를 중심으로 하고 $\overline{OA}$를 반지름으로 하는 원을 그려 수직선과 만나는 점을 각각 P, Q라고 하면 두 점 P, Q에 대응하는 수는 각각 $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$이다.

답 풀이 참조

문제 2

오른쪽 그림에서 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. 다음 수에 대응하는 점을 각각 수직선 위에 나타내시오.

(1) $-\sqrt{10}$

(2) $1+\sqrt{5}$

생각 3 **제곱근의 값을 어떻게 구할 수 있나요?**

제곱근의 값은 제곱근표나 계산기를 이용하여 구할 수 있다.

부록에 있는 제곱근표에는 1.00부터 9.99까지의 수는 0.01의 간격으로, 10.0부터 99.9까지의 수는 0.1의 간격으로 양의 제곱근의 값이 제시되어 있다.

제곱근표의 값은 반올림하여 소수점 아래 셋째 자리까지 나타낸 것이다.

예를 들어 $\sqrt{5.92}$의 값은 제곱근표에서 왼쪽의 수 5.9의 가로줄과 위쪽의 수 2의 세로줄이 만나는 곳의 수인 2.433이다.

수	0	1	2	3
5.7	2.387	2.390	2.392	2.394
5.8	2.408	2.410	2.412	2.415
5.9	2.429	2.431	2.433	2.435
6.0	2.449	2.452	2.454	2.456

예 제곱근표에서 $\sqrt{6.03}$의 값은 2.456, $\sqrt{5.7}$의 값은 2.387이다.

문제 3 제곱근표를 이용하여 다음 수의 값을 구하시오.

(1) $\sqrt{3.21}$ (2) $\sqrt{6.04}$ (3) $\sqrt{17}$ (4) $\sqrt{81.7}$

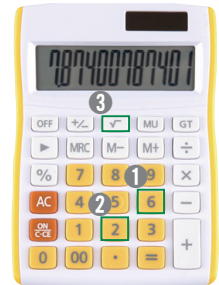
계산기를 이용하여 $\sqrt{62}$의 값을 구해 보자.

오른쪽 그림에 표시된 번호 순서대로 계산기를 눌러 나타난 수 7.87400787401이 $\sqrt{62}$의 값이다.

예 계산기를 이용하여 $\sqrt{7.5}$의 값을 구해 보면 7, ·, 5, √ 를 순서대로 눌러 나타난 수 2.73861278752가 $\sqrt{7.5}$의 값이다.

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

1

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 유리수가 아닌 수를 □라고 한다.

(2) 유리수와 무리수를 통틀어 □라고 한다.

(3) 수직선 위의 각 점에 □를 하나씩 대응시킬 수 있다.

2

다음 수 중에서 무리수를 모두 고르시오.

$-2,\quad \sqrt{9},\quad \sqrt{3}-1,\quad -\sqrt{0.04},$
$\pi,\quad \sqrt{\frac{1}{16}},\quad -\sqrt{\frac{3}{25}},\quad 6.\dot{1}$

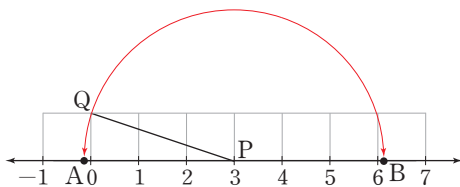
3

다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르시오.

보기

ㄱ. 무한소수는 무리수이다.
ㄴ. 유리수 중에는 무한소수도 있다.
ㄷ. 실수에서 무리수가 아닌 수는 모두 유리수이다.
ㄹ. 근호가 있는 수는 모두 무리수이다.

4

다음 그림에서 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. 점 P를 중심으로 하고 $\overline{PQ}$를 반지름으로 하는 원을 그려 수직선과 만나는 점을 각각 A, B라고 할 때, 두 점 A, B에 대응하는 수를 각각 구하시오.

5

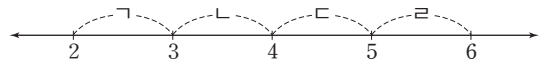
아래 표는 제곱근표의 일부를 나타낸 것이다. 제곱근표를 이용하여 다음 수의 값을 구하시오.

수	0	1	2	3	4	5
9.6	3.098	3.100	3.102	3.103	3.105	3.106
9.7	3.114	3.116	3.118	3.119	3.121	3.122
9.8	3.130	3.132	3.134	3.135	3.137	3.138
9.9	3.146	3.148	3.150	3.151	3.153	3.154
10	3.162	3.178	3.194	3.209	3.225	3.240
11	3.317	3.332	3.347	3.362	3.376	3.391
12	3.464	3.479	3.493	3.507	3.521	3.536

(1) $\sqrt{12.2}$　　(2) $\sqrt{10}$

(3) $\sqrt{9.7}$　　(4) $\sqrt{9.65}$

6 추론

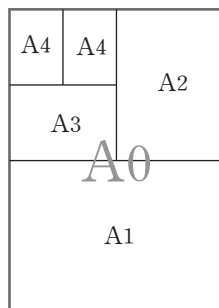
다음 수직선에서 $2+\sqrt{5}$에 대응하는 점이 존재하는 구간을 고르시오.

7 과정을 다지는 문제

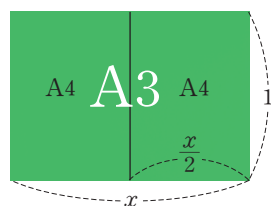
다음 조건을 모두 만족시키는 x는 몇 개인지 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

(가) x는 20 이하의 자연수이다.
(나) $\sqrt{2x}$는 무리수이다.

A4 용지에서 $\sqrt{2}$ 찾기

우리가 복사 또는 인쇄용으로 많이 사용하는 A4 용지는 반으로 잘라도 그 모양이 같도록 하여 종이의 낭비가 없게 고안된 것이다. 오른쪽 그림과 같이 A0 용지(841×1189 mm)를 반으로 자르는 과정을 반복해 나가면 A1, A2, A3, A4 등 서로 닮음인 직사각형 모양의 용지를 만들 수 있다.

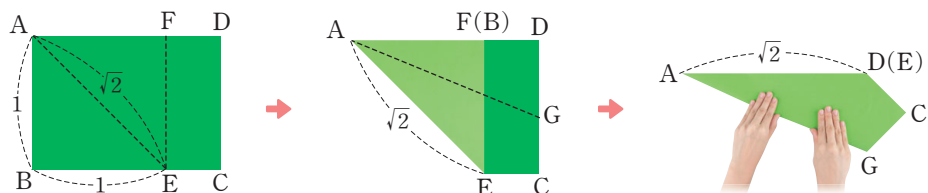
이 용지들의 짧은 변과 긴 변의 길이의 비를 알아보자.

[방법 1] 닮음비를 이용하기

오른쪽 그림과 같이 A3 용지의 짧은 변과 긴 변의 길이의 비를 $1:x$라고 하면 A4 용지의 짧은 변과 긴 변의 길이의 비는 $\frac{x}{2}:1$이 된다. 두 용지가 서로 닮음인 직사각형이므로 $1:x=\frac{x}{2}:1$, 즉 $x^2=2$이다. 이때 $x>0$이므로 $x=\sqrt{2}$이다.

따라서 두 용지의 짧은 변과 긴 변의 길이의 비는 모두 $1:\sqrt{2}$가 된다. 실제로 두 용지의 변의 길이를 재어 보면 짧은 변과 긴 변의 길이의 비가 $1:\sqrt{2}$에 가까움을 알 수 있다.

[방법 2] 종이접기를 이용하기

❶ A4 용지를 □ABCD라고 할 때, $\overline{AB}$와 $\overline{AD}$가 겹치도록 접고 점 B가 닿는 지점을 F라고 하자. 이때 $\overline{AB}=\overline{BE}=1$이라고 하면 $\overline{AE}=\sqrt{2}$이다.

❷ $\overline{AE}$와 $\overline{AD}$가 겹치도록 접으면 점 D와 점 E는 맞닿게 된다.

따라서 $\overline{AD}=\overline{AE}=\sqrt{2}$이다.

❶, ❷에서 A4 용지의 짧은 변과 긴 변의 길이의 비는 $1:\sqrt{2}$임을 알 수 있다.

확인

자를 이용하여 A4 용지의 짧은 변과 긴 변의 길이를 재어 보고, 계산기를 이용하여 짧은 변과 긴 변의 길이의 비가 $1:\sqrt{2}$에 가까워지는지 확인해 보자.

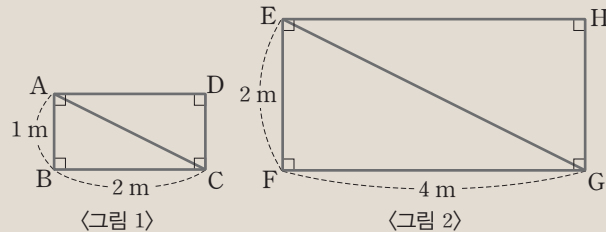
1.4 제곱근의 곱셈

학 | 습 | 목 | 표

- 제곱근의 곱셈을 할 수 있다.

대각선 지지대의 길이

건축 현장에서는 작업과 안전을 위해서 다양한 길이의 지지대를 가로, 세로, 대각선으로 연결하여 임시 구조물을 설치하는 경우가 있습니다. 아래 그림과 같은 대각선 지지대의 길이를 구하는 방법을 생각해 봅시다.

〈그림 1〉 〈그림 2〉

활동 1 〈그림 1〉의 대각선 지지대 $\overline{AC}$의 길이를 구해 보자.

활동 2 닮음비를 이용하여 〈그림 2〉의 대각선 지지대 $\overline{EG}$의 길이를 구해 보자.

활동 3 피타고라스 정리를 이용하여 〈그림 2〉의 대각선 지지대 $\overline{EG}$의 길이를 구해 보고, **활동 2**의 결과와 비교해 보자.

생각 1

생각 열기에서 $\triangle ABC$와 $\triangle EFG$의 닮음비는 $1:2$이다.

대각선 지지대의 길이를 어떻게 구할 수 있나요?

생각 열기의 〈그림 2〉에서 대각선 지지대 $\overline{EG}$의 길이를 닮음비를 이용하여 구하면 $(2\times\sqrt{5})$ m이고, 피타고라스 정리를 이용하여 구하면 $\sqrt{20}$ m이다.

두 값은 모두 $\overline{EG}$의 길이를 나타내므로

$$2\times\sqrt{5}=\sqrt{20}$$

이다. 이때 $2\times\sqrt{5}=\sqrt{4}\times\sqrt{5}$, $\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}$이므로 다음이 성립한다.

$$\sqrt{4}\times\sqrt{5}=\sqrt{4\times5}$$

| **참고** | $\sqrt{4}\times\sqrt{5}$, $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$는 곱셈 기호를 생략하고 $\sqrt{4}\sqrt{5}$, $\sqrt{a}\sqrt{b}$로 쓰기도 한다.

일반적으로 $a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$임을 알아보자.

$\sqrt{a}\sqrt{b}$는 양수이고, 이 수를 제곱하면

실수의 곱셈에서도 유리수의 곱셈에서와 같이 곱셈의 교환법칙과 결합법칙이 성립한다.

$$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}\sqrt{b})\times(\sqrt{a}\sqrt{b})$$
$$=(\sqrt{a}\sqrt{a})(\sqrt{b}\sqrt{b})$$
$$=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2=ab$$

따라서 $\sqrt{a}\sqrt{b}$는 ab의 양의 제곱근이다.

즉, $a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$이다.

위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

제곱근의 곱셈 (1)

$a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

예 (1) $\sqrt{3}\sqrt{7}=\sqrt{3\times7}=\sqrt{21}$ (2) $\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$

문제 1 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt{2}\sqrt{8}$ (2) $-\sqrt{5}\sqrt{14}$

(3) $\sqrt{7}\sqrt{\frac{2}{7}}$ (4) $\sqrt{\frac{27}{7}}\sqrt{\frac{14}{9}}$

생각 2 근호 안에 있는 수를 근호 밖으로 꺼낼 수 있나요?

$\sqrt{20}=\sqrt{2^2\times5}$와 같이 근호 안에 어떤 수의 제곱이 있으면 이것을 근호 밖으로 꺼내어 간단히 나타낼 수 있다. 즉,

$$\sqrt{20}=\sqrt{2^2\times5}=\sqrt{2^2}\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

이다.

또, 근호 밖의 양수는

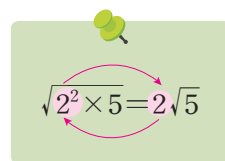
$$2\sqrt{5}=\sqrt{2^2}\sqrt{5}=\sqrt{2^2\times5}=\sqrt{20}$$

과 같이 제곱하여 근호 안으로 넣을 수 있다.

일반적으로 다음과 같은 성질이 성립한다.

제곱근의 곱셈 (2)

$a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

$a>0$일 때, $\sqrt{a^2}=a$

다음 수를 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타내시오.

(1) $\sqrt{3^2\times2}$　　(2) $-\sqrt{48}$

$a\sqrt{b}$의 꼴로 나타낼 때에는 일반적으로 b를 가장 작은 자연수로 나타낸다.

풀이 | (1) $\sqrt{3^2\times2}=3\sqrt{2}$

(2) $-\sqrt{48}=-\sqrt{4^2\times3}=-4\sqrt{3}$

답 (1) $3\sqrt{2}$　(2) $-4\sqrt{3}$

문제 2 다음 수를 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타내시오.

(1) $\sqrt{28}$　(2) $\sqrt{2\times5^2}$　(3) $-\sqrt{96}$　(4) $\sqrt{300}$

예제 2

다음 수를 $\sqrt{a}$ 또는 $-\sqrt{a}$의 꼴로 나타내시오.

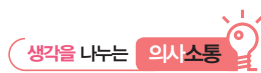
(1) $5\sqrt{5}$　　(2) $-4\sqrt{2}$

풀이 | (1) $5\sqrt{5}=\sqrt{5^2\times5}=\sqrt{125}$

(2) $-4\sqrt{2}=-\sqrt{4^2\times2}=-\sqrt{32}$

답 (1) $\sqrt{125}$　(2) $-\sqrt{32}$

문제 3 다음 수를 $\sqrt{a}$ 또는 $-\sqrt{a}$의 꼴로 나타내시오.

(1) $6\sqrt{3}$　(2) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$　(3) $-5\sqrt{2}$　(4) $4\sqrt{\frac{3}{2}}$

다음 풀이 과정에서 잘못된 부분을 찾아 바르게 고치고, 왜 그렇게 고쳤는지 말해 보자.

$$-3\sqrt{5}=\sqrt{(-3)^2\times5}=\sqrt{45}$$

수학 집 짓기

a>0, b>0일 때

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

1

$a>0$, $b>0$일 때, 다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=\square$

(2) $\sqrt{a^2b}=\square$

2

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt{3}\sqrt{7}$ (2) $-\sqrt{6}\sqrt{11}$

(3) $\sqrt{7}\sqrt{\frac{2}{5}}$ (4) $\sqrt{\frac{15}{4}}\sqrt{\frac{12}{5}}$

3

다음 수를 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타내시오.

(1) $\sqrt{5^2\times13}$ (2) $\sqrt{2^2\times3\times5^3}$

(3) $\sqrt{44}$ (4) $-\sqrt{108}$

4

다음 수를 $\sqrt{a}$ 또는 $-\sqrt{a}$의 꼴로 나타내시오.

(1) $2\sqrt{2}$ (2) $-3\sqrt{6}$

(3) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ (4) $\frac{1}{5}\sqrt{50}$

5

다음 식을 간단히 하시오.

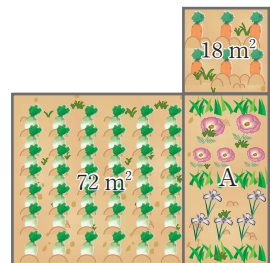
(1) $3\sqrt{3}\times\sqrt{6}$ (2) $4\sqrt{3}\times(-2\sqrt{15})$

(3) $-\sqrt{7}\times(-3\sqrt{35})$ (4) $-\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{15}}{5}$

6 추론

$4\sqrt{2}=\sqrt{a}$, $\sqrt{125}=b\sqrt{5}$일 때, $a-b$의 값을 구하시오.

7 과정을 다지는 문제

오른쪽 그림과 같이 넓이가 각각 18 m^2, 72 m^2인 두 정사각형 모양의 밭에 이웃한 직사각형 모양의 화단 A의 넓이를 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

1.5 제곱근의 나눗셈

학습목표

- 제곱근의 나눗셈을 할 수 있다.
- 제곱근의 성질과 제곱근표를 이용하여 제곱근의 값을 구할 수 있다.
- 분수의 분모를 유리화할 수 있다.

학습요소

- 분모의 유리화

생각 열기

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$와 $\sqrt{\frac{a}{b}}$의 값의 비교

$a>0$, $b>0$일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$와 $\sqrt{\frac{a}{b}}$의 값을 비교해 봅시다.

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$
36	9	6	3	$\frac{6}{3}=2$	$\sqrt{\frac{36}{9}}=\sqrt{4}=2$
9	16				

활동 1 위의 표를 완성해 보자.

활동 2 **활동 1**에서 $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}$와 $\sqrt{\frac{9}{16}}$의 값을 비교해 보자.

생각 1 근호를 포함한 식의 나눗셈은 어떻게 할 수 있나요?

$\sqrt{9}=3$, $\sqrt{16}=4$이므로 $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}$이고, $\sqrt{\frac{9}{16}}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{3}{4}$이다.

따라서 $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\sqrt{\frac{9}{16}}$임을 알 수 있다.

일반적으로 $a>0$, $b>0$일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$임을 알아보자.

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$는 양수이고, 이 식을 제곱하면

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}$$

따라서 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$는 $\frac{a}{b}$의 양의 제곱근이다.

즉, $a>0$, $b>0$일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$이다.

앞의 내용을 정리하면 다음과 같다.

제곱근의 나눗셈

$a>0$, $b>0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

예 (1) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\dfrac{10}{6}}=\sqrt{\dfrac{5}{3}}$　　(2) $\sqrt{35}\div\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{35}{5}}=\sqrt{7}$

문제 1 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}}$　　(2) $-\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{24}}$

(3) $\sqrt{7}\div\sqrt{28}$　　(4) $\sqrt{143}\div\sqrt{11}$

제곱근표에 실려 있지 않은 1보다 작은 수의 제곱근의 값과 100보다 큰 수의 제곱근의 값은 제곱근의 성질과 제곱근표를 이용하여 구할 수 있다.

예제 1 제곱근표를 이용하여 다음 수의 값을 구하시오.

(1) $\sqrt{345}$　　(2) $\sqrt{0.345}$

풀이 | (1) $\sqrt{345}=\sqrt{100\times3.45}=10\sqrt{3.45}$이고,

제곱근표에서 $\sqrt{3.45}$의 값은 1.857이므로

$\sqrt{345}$의 값은 $10\times1.857=18.57$

(2) $\sqrt{0.345}=\sqrt{\dfrac{34.5}{100}}=\dfrac{\sqrt{34.5}}{10}$이고,

제곱근표에서 $\sqrt{34.5}$의 값은 5.874이므로

$\sqrt{0.345}$의 값은 $\dfrac{5.874}{10}=0.5874$

답 (1) 18.57　(2) 0.5874

문제 2 제곱근표를 이용하여 다음 수의 값을 구하시오.

(1) $\sqrt{123}$　　(2) $\sqrt{4200}$

(3) $\sqrt{0.19}$　　(4) $\sqrt{0.033}$

생각 2 분모에 근호를 포함한 수가 있을 때, 분모를 유리수로 어떻게 고칠 수 있나요?

$\frac{1}{\sqrt{3}}$의 분자와 분모에 각각 $\sqrt{3}$을 곱하면

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

이 되어 분모는 유리수가 된다.

$\frac{\sqrt{3}}{3}$은 $\frac{1}{\sqrt{3}}$보다 그 값을 소수로 나타내기 편하다.

이와 같이 분수의 분모에 근호가 있을 때, 분자와 분모에 0이 아닌 같은 수를 곱하여 분모를 유리수로 고치는 것을 **분모의 유리화**라고 한다.

일반적으로 $a>0$, $b>0$일 때,

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\times\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$$

이다.

예제 2

다음 수의 분모를 유리화하시오.

(1) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$　　(2) $\frac{5}{7\sqrt{5}}$

풀이 | (1) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(2) $\frac{5}{7\sqrt{5}}=\frac{5\times\sqrt{5}}{7\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{7\times5}=\frac{\sqrt{5}}{7}$

답 (1) $\frac{\sqrt{6}}{2}$　(2) $\frac{\sqrt{5}}{7}$

문제 3 다음 수의 분모를 유리화하시오.

(1) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$　　(2) $\frac{2}{\sqrt{6}}$

(3) $\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$　　(4) $\frac{5\sqrt{8}}{2\sqrt{7}}$

제곱근의 곱셈과 나눗셈이 혼합된 식은 유리수에서와 같이 앞에서부터 차례로 계산한다.

예제 3

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt{7}\times\sqrt{21}\div\sqrt{27}$　　(2) $\sqrt{7}\div\frac{\sqrt{2}}{6}\times\sqrt{3}$

풀이 | (1) $\sqrt{7}\times\sqrt{21}\div\sqrt{27}=\sqrt{7}\times\sqrt{21}\times\frac{1}{\sqrt{27}}=7\sqrt{3}\times\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{7}{3}$

(2) $\sqrt{7}\div\frac{\sqrt{2}}{6}\times\sqrt{3}=\sqrt{7}\times\frac{6}{\sqrt{2}}\times\sqrt{3}=\frac{6\sqrt{21}}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{21}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{42}}{2}=3\sqrt{42}$

답 (1) $\frac{7}{3}$　(2) $3\sqrt{42}$

문제 4

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt{5}\times\sqrt{2}\div\sqrt{15}$　　(2) $\sqrt{49}\div\sqrt{7}\times(-\sqrt{28})$

(3) $4\sqrt{2}\div\sqrt{3}\times3$　　(4) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{8}}\times\sqrt{5}\div\sqrt{35}$

생각을 나누는 **의사소통**

동료 평가

- 친구는 동현, 수빈, 민재의 방법으로 각각 풀어 보았는가?
- 친구는 내가 비교하여 말한 것을 잘 경청하였는가?

$\frac{1}{\sqrt{12}}$을 동현이네 모둠 학생들이 각각 사용한 방법으로 분모의 유리화를 해 보고, 세 학생의 풀이 방법을 비교하여 친구와 이야기해 보자.

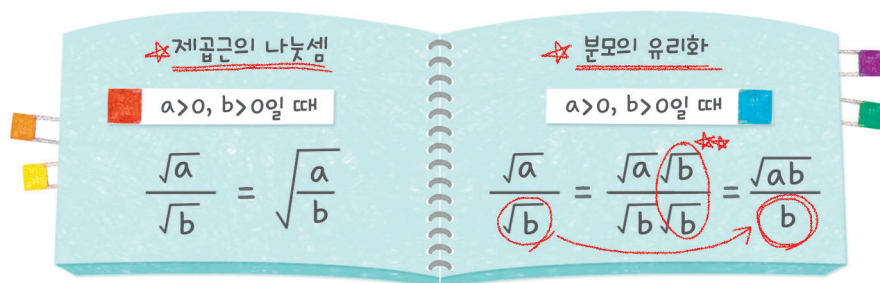
동현: 분자와 분모에 각각 $\sqrt{12}$를 곱하면 되겠네.

수빈: 분자와 분모에 각각 $2\sqrt{3}$을 곱해야 돼.

민재: 분자와 분모에 각각 $\sqrt{3}$만 곱하면 되지 않을까?

수학 집 짓기

스스로 해결하기

1

다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $a>0$, $b>0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\square}$

(2) 분수의 분모에 근호가 있을 때, 분자와 분모에 0이 아닌 같은 수를 곱하여 분모를 유리수로 고치는 것을 분모의 $\square$라고 한다.

(3) $a>0$, $b>0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\square}{b}$

2

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$　　(2) $-\dfrac{\sqrt{42}}{\sqrt{6}}$

(3) $\sqrt{175}\div\sqrt{7}$　　(4) $\sqrt{24}\div\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

3

제곱근표에서 $\sqrt{5}$의 값이 2.236, $\sqrt{50}$의 값이 7.071일 때, 다음 수의 값을 구하시오.

(1) $\sqrt{500}$　　(2) $\sqrt{5000}$

(3) $\sqrt{0.5}$　　(4) $\sqrt{0.05}$

4

다음 수의 분모를 유리화하시오.

(1) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}$

(3) $\dfrac{5}{\sqrt{10}}$　　(4) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}$

5

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $4\sqrt{3}\times\sqrt{5}\div\sqrt{3}$　　(2) $2\sqrt{18}\div\sqrt{6}\times2$

(3) $-\sqrt{39}\times4\sqrt{3}\div\sqrt{13}$　　(4) $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}\div\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{7}}\times\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$

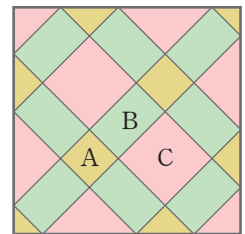
6

제곱근표에서 $\sqrt{9.72}$의 값이 3.118일 때, $\sqrt{a}$의 값이 311.8이 되도록 하는 a의 값을 구하시오.

7 추론

$\dfrac{5\sqrt{6}}{a\sqrt{10}}$의 분모를 유리화하였더니 $\dfrac{\sqrt{15}}{6}$가 되었다. 이때 a의 값을 구하시오.

8 과정을 다지는 문제

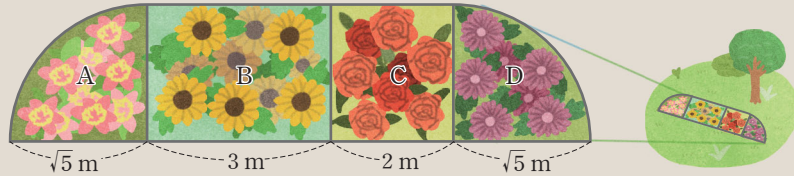
오른쪽 그림은 A, B, C 세 종류의 조각 타일을 빈틈없이 이어 붙인 벽면의 일부이다. 정사각형 A의 넓이는 3, 직사각형 B의 넓이는 $\sqrt{10}$일 때, 정사각형 C의 넓이를 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

1.6 제곱근의 덧셈과 뺄셈

학 | 습 | 목 | 표

- 제곱근의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.
- 제곱근의 사칙계산을 할 수 있다.

생각 열기

꽃밭의 넓이

다음 그림은 직사각형과 사분원 모양으로 이루어진 어느 공원의 꽃밭입니다. 직사각형 모양의 꽃밭의 넓이를 구하는 방법을 생각해 봅시다.

활동 1 직사각형 모양의 꽃밭 B, C의 넓이를 각각 구해 보자.

활동 2 직사각형 모양의 전체 꽃밭의 넓이를 (가로의 길이)×(세로의 길이)로 나타내 보자.

활동 3 **활동 1**, **2**에서 구한 넓이를 이용하여 등식을 만들어 보자.

생각 1

직사각형 모양의 꽃밭의 넓이를 어떻게 구할 수 있나요?

꽃밭 B, C의 넓이는 각각 $3\sqrt{5}\text{ m}^2$, $2\sqrt{5}\text{ m}^2$이고, 직사각형 모양의 전체 꽃밭의 넓이는 $(3+2)\times\sqrt{5}=5\sqrt{5}(\text{m}^2)$이므로

$$3\sqrt{5}+2\sqrt{5}=5\sqrt{5}$$

이다. 이때 $\sqrt{5}$를 하나의 문자로 생각하면

$$3\sqrt{5}+2\sqrt{5}=(3+2)\sqrt{5}=5\sqrt{5}$$

이다.

$3a+2a=(3+2)a=5a$

$3\sqrt{5}+2\sqrt{5}=(3+2)\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

중1 배웠어요!

동류항: 다항식에서 곱해진 문자와 그 문자에 관한 차수가 같은 항

이와 같이 제곱근의 덧셈과 뺄셈은 다항식의 덧셈과 뺄셈에서 동류항끼리 모아서 계산한 것과 같은 방법으로 근호 안의 수가 같은 것끼리 모아서 계산한다.

예 (1) $7\sqrt{3}-2\sqrt{3}=(7-2)\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

(2) $6\sqrt{6}+2\sqrt{6}-\sqrt{6}=(6+2-1)\sqrt{6}=7\sqrt{6}$

문제 1 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt{11}+3\sqrt{11}$　　　(2) $3\sqrt{7}-6\sqrt{7}+2\sqrt{7}$

a, b가 양수일 때 $\sqrt{a^2b}$와 같이 근호 안에 어떤 수의 제곱이 있는 수는 $a\sqrt{b}$와 같이 간단히 나타내고, 분수의 분모에 근호가 있으면 분모를 유리화하여 간단히 한 후에 계산한다.

$4\sqrt{5}-\sqrt{125}+\dfrac{15}{\sqrt{5}}$를 간단히 하시오.

풀이 | $4\sqrt{5}-\sqrt{125}+\dfrac{15}{\sqrt{5}}=4\sqrt{5}-\sqrt{5^2\times5}+\dfrac{15\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$

$=4\sqrt{5}-5\sqrt{5}+3\sqrt{5}$

$=(4-5+3)\sqrt{5}$

$=2\sqrt{5}$

답 $2\sqrt{5}$

문제 2 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt{12}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　　　(2) $\sqrt{50}-\sqrt{18}-\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

생각 2

근호를 포함한 식의 사칙계산은 어떻게 할 수 있나요?

근호를 포함한 식에 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 섞여 있을 때에는 유리수와 마찬가지로 곱셈과 나눗셈을 먼저 계산한 후 덧셈과 뺄셈을 계산한다.

괄호가 있는 식은 분배법칙을 이용하여 괄호를 푼 후 계산한다.

배웠어요!

분배법칙

$a(b+c)=ab+ac$

$(a+b)c=ac+bc$

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $2\sqrt{3}-\sqrt{6}\div\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{6}(\sqrt{2}-3\sqrt{3})$

풀이 | (1) $2\sqrt{3}-\sqrt{6}\div\sqrt{2}=2\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{3}-\sqrt{3}$

$=(2-1)\sqrt{3}=\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{6}(\sqrt{2}-3\sqrt{3})=\sqrt{6}\times\sqrt{2}-\sqrt{6}\times3\sqrt{3}$

$=\sqrt{12}-3\sqrt{18}=2\sqrt{3}-3\times3\sqrt{2}$

$=2\sqrt{3}-9\sqrt{2}$

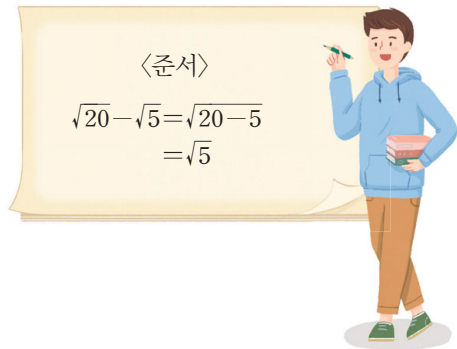
근호 안에 있는 어떤 수의 제곱인 수를 근호 밖으로 꺼냈을 때, 근호 안의 수가 다르면 더 이상 간단히 하지 않고 그대로 둔다.

답 (1) $\sqrt{3}$ (2) $2\sqrt{3}-9\sqrt{2}$

문제 3 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt{18}+4\div\sqrt{2}-4\sqrt{2}$ (2) $(\sqrt{18}-\sqrt{6})\div\sqrt{3}$

다음은 지원이와 준서가 식을 간단히 나타낸 것이다. 잘못된 부분을 찾아 바르게 고치고, 왜 그렇게 고쳤는지 친구와 이야기해 보자.

동료 평가
- 친구가 잘못된 부분을 바르게 고쳤는가?
- 친구가 고친 이유에 대해 적절히 설명하였는가?

수학 집 짓기

$a>0$일 때

$m\sqrt{a}+n\sqrt{a}=(m+n)\sqrt{a}$

$m\sqrt{a}-n\sqrt{a}=(m-n)\sqrt{a}$

스스로 해결하기

1

다음 ☐ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 제곱근의 덧셈과 뺄셈은 ☐ 안의 수가 같은 것끼리 모아서 계산한다.

(2) 근호를 포함한 식에 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 섞여 있을 때에는 유리수와 마찬가지로 ☐과 ☐을 먼저 계산한다.

2

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $5\sqrt{3}+8\sqrt{3}$

(2) $3\sqrt{6}-\frac{5}{2}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{6}$

(3) $-2\sqrt{20}+\sqrt{45}$

(4) $\frac{13}{\sqrt{7}}+\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}-\frac{2}{7}\sqrt{63}$

3

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $-\sqrt{3}(\sqrt{50}+3\sqrt{2})$

(2) $(\sqrt{30}-\sqrt{18})\div\sqrt{6}$

(3) $\sqrt{24}\div\sqrt{8}+5\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{18}\div\frac{1}{\sqrt{6}}+\sqrt{12}\times\sqrt{3}$

4

$x=2\sqrt{3}$이고 x의 역수를 y라고 할 때, $x+y$의 값을 구하시오.

5 추론

$\sqrt{3}$의 값은 $1.732\cdots$이므로 정수 부분은 1이고 소수 부분은 $0.732\cdots$이다. 다음 물음에 답하시오.

(1) $\sqrt{3}$의 소수 부분을 정수 부분을 이용하여 나타내시오.

(2) $5-\sqrt{3}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $a-b$의 값을 구하시오. (단, $0\le b<1$)

6 과정을 다지는 문제

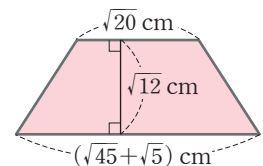
오른쪽 그림과 같은 사다리꼴의 넓이를 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

$\sqrt{20}$ cm

$\sqrt{12}$ cm

$(\sqrt{45}+\sqrt{5})$ cm

수학 놀이터

명언 완성하기

● 아래 문제의 답을 보기에서 찾아 그 답과 짝 지어진 단어를 다음 번호가 적힌 칸에 써넣어 명언을 완성해 보자.

번호	문제
1	$\sqrt{4^2}-\sqrt{(-5)^2}+\sqrt{36}$
2	$3\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{6}$
3	$\sqrt{18}\div\sqrt{72}$
4	$\sqrt{12}+\sqrt{28}-\sqrt{27}-\sqrt{7}$
5	$4\sqrt{2}\times\sqrt{20}\div\sqrt{10}$
6	$3\sqrt{7}-\sqrt{56}\div\sqrt{2}$

보기			
5	친구	$\sqrt{7}-\sqrt{3}$	배
$\sqrt{7}$	반	8	슬픔
$\sqrt{3}$	나	$\frac{1}{2}$	기쁨

1.7 실수의 대소 관계

학 | 습 | 목 | 표

- 실수의 대소 관계를 이해한다.
- 실수의 크기를 비교할 수 있다.

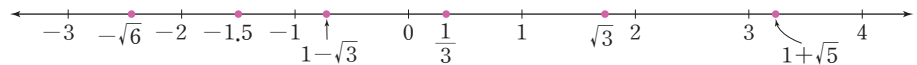
카드놀이

지홍이와 민우는 $\sqrt{3}$, -1.5, $-\sqrt{6}$, $1-\sqrt{3}$, $1+\sqrt{5}$, $\frac{1}{3}$ 이 각각 적혀 있는 6장의 카드를 만들어 작은 수부터 크기 순서대로 나열하는 카드놀이를 하였습니다. 각 카드에 적힌 수의 크기를 생각해 봅시다.

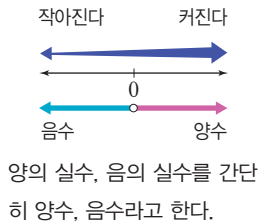
활동 1 음수가 적힌 카드를 모두 골라 보자.

활동 2 가장 큰 수와 가장 작은 수가 적힌 카드를 각각 골라 보자.

생각 1 6장의 카드에 적힌 수를 수직선 위에 나열할 수 있나요?

$\sqrt{3}$, -1.5, $-\sqrt{6}$, $1-\sqrt{3}$, $1+\sqrt{5}$, $\frac{1}{3}$을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.

수를 수직선 위에 나타내었을 때, 오른쪽에 있는 수가 왼쪽에 있는 수보다 크므로 $-\sqrt{6}<-1.5<1-\sqrt{3}<\frac{1}{3}<\sqrt{3}<1+\sqrt{5}$임을 알 수 있다.

일반적으로 실수의 대소 관계에서도 유리수의 경우와 같이 다음이 성립한다.

양의 실수, 음의 실수를 간단히 양수, 음수라고 한다.

실수의 대소 관계 (1)

1. 양수는 0보다 크고, 음수는 0보다 작다.
2. 양수는 음수보다 크다.
3. 두 양수에서는 절댓값이 큰 수가 크다.
4. 두 음수에서는 절댓값이 큰 수가 작다.

문제 1 다음 두 실수의 대소를 비교하시오.

(1) 0, $-\sqrt{2}$　　(2) $-\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$　　(3) $\sqrt{2}$, $\frac{5}{2}$　　(4) -1, $-\sqrt{3}$

생각 2

부등식의 성질을 이용하여 실수의 크기를 비교할 수 있나요?

중2 배웠어요!

$a>b$일 때

1. $a+c>b+c$
   $a-c>b-c$
2. $c>0$이면
   $ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$
3. $c<0$이면
   $ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

실수에서도 유리수에서와 같이 부등식의 성질이 성립한다.

즉, 두 실수 a, b에 대하여

$$a-b>0\text{이면 } a-b+b>0+b\text{이므로 } a>b$$

가 성립한다. 또,

$$a>b\text{이면 } a-b>b-b\text{이므로 } a-b>0$$

이 성립한다.

일반적으로 두 실수 a, b의 대소 관계는 $a-b$의 값의 부호를 조사하면 알 수 있다. 이를 정리하면 다음과 같다.

실수의 대소 관계 (2)

두 실수 a, b에 대하여

1. $a-b>0$이면 $a>b$ **2.** $a-b=0$이면 $a=b$ **3.** $a-b<0$이면 $a<b$

예제 1 두 실수 $\sqrt{3}+2$와 $\sqrt{3}+\sqrt{7}$의 대소를 비교하시오.

풀이 | $(\sqrt{3}+2)-(\sqrt{3}+\sqrt{7})=\sqrt{3}+2-\sqrt{3}-\sqrt{7}=2-\sqrt{7}=\sqrt{4}-\sqrt{7}<0$

따라서 $\sqrt{3}+2<\sqrt{3}+\sqrt{7}$

답 $\sqrt{3}+2<\sqrt{3}+\sqrt{7}$

문제 2 다음 두 실수의 대소를 비교하시오.

(1) $\sqrt{3}+2$, 4 (2) $5-\sqrt{2}$, $5-\sqrt{3}$

(3) $1-\sqrt{2}$, $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ (4) $\sqrt{7}+2$, $\sqrt{7}+\sqrt{3}$

수학 집 짓기

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

1

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 수를 수직선 위에 나타내었을 때, 오른쪽에 있는 수가 왼쪽에 있는 수보다 □.

(2) 양수는 0보다 □, 음수는 0보다 □.

(3) 두 양수에서는 절댓값이 큰 수가 □.

(4) 두 음수에서는 절댓값이 큰 수가 □.

2

다음 두 실수의 대소를 비교하시오.

(1) $\sqrt{17}$, $\sqrt{15}$

(2) -5, $-\sqrt{26}$

(3) $\sqrt{3}-1$, $\sqrt{5}-1$

(4) $2+\sqrt{6}$, $\sqrt{6}+\sqrt{5}$

3

두 실수 $5\sqrt{3}-\sqrt{12}$와 $\sqrt{2}+\sqrt{18}$의 대소를 비교하시오.

4

다음 수를 큰 것부터 차례대로 쓰시오.

$2+\sqrt{3}$, 3, $\sqrt{3}+\sqrt{6}$

5 추론

다음 물음에 답하시오.

(1) $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에 있는 유리수를 3개 찾으시오.

(2) $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에 있는 무리수를 3개 찾으시오.

6 과정을 다지는 문제

다음 수 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합을 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

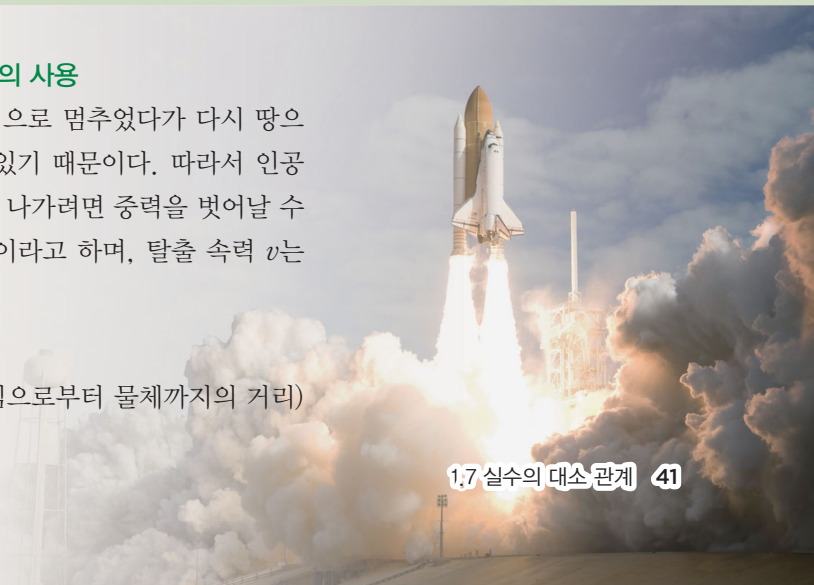
-1, $\sqrt{7}-\sqrt{3}$, $3-\sqrt{10}$, 2, $-1+\sqrt{7}$

수학 이야기

탈출 속력(Escape Velocity) – 제곱근을 사용한 식의 사용

물체를 위로 던지면 보통 속력이 점점 느려져 순간적으로 멈추었다가 다시 땅으로 떨어진다. 이는 지구의 중력이 물체를 끌어당기고 있기 때문이다. 따라서 인공위성이나 로켓이 지구의 중력을 이겨 내고 지구 밖으로 나가려면 중력을 벗어날 수 있는 최소한의 속력이 필요하다. 이 속력을 탈출 속력이라고 하며, 탈출 속력 v는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$v=\sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

(G: 만유인력 상수, M: 행성의 질량, r: 행성의 중심으로부터 물체까지의 거리)

단원 마무리

01

다음 보기에서 나머지 넷과 값이 다른 것을 찾으시오.

보기
ㄱ. 4와 -4
ㄴ. 16의 제곱근
ㄷ. 제곱근 16
ㄹ. 제곱하여 16이 되는 수
ㅁ. $x^2=16$을 만족시키는 x의 값

02

$\sqrt{81}$의 양의 제곱근을 a, $\frac{9}{64}$의 음의 제곱근을 b라고 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

03 서술형

$\sqrt{48n}$이 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 n의 값을 구하시오. (단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

04

$a<0<b$일 때, $\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}$을 간단히 하시오.

05

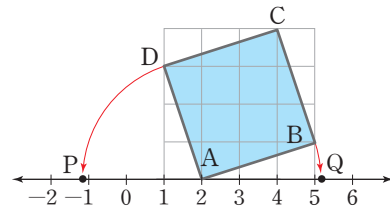
부등식 $3<\sqrt{x}<4$를 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오.

06

다음 수 중에서 무리수를 모두 찾으시오.

$\sqrt{1.6}$, $\sqrt{\frac{3}{12}}$, $\sqrt{2}-1$, $0.\dot{7}$, $-\sqrt{9}+5$, -1.414

07

다음 그림에서 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. $\overline{AD}=\overline{AP}$, $\overline{AB}=\overline{AQ}$가 되는 수직선 위의 두 점을 각각 P, Q라고 할 때, $\overline{PQ}$의 길이를 구하시오.

08

$\sqrt{3}\times\sqrt{a}\times\sqrt{5}\times\sqrt{45}\times\sqrt{3a}=90$일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

09

$\frac{4}{\sqrt{3}}\times\frac{2}{\sqrt{2}}\div\sqrt{\frac{9}{8}}=a\sqrt{3}$을 만족시키는 a의 값을 구하시오.

10 서술형

$a>0$, $b>0$이고 $ab=36$일 때, $a\sqrt{\frac{12b}{a}}+b\sqrt{\frac{3a}{b}}$의 값을 구하시오. (단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

11

제곱근표에서 $\sqrt{54.8}$의 값이 7.403일 때, $\sqrt{a}$의 값이 0.7403이 되도록 하는 a의 값을 구하시오.

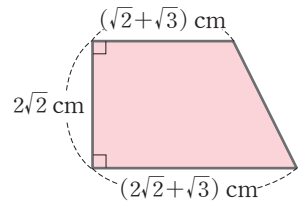
12

$\sqrt{2}=a$, $\sqrt{5}=b$라고 할 때, 다음을 a, b의 식으로 나타내시오.

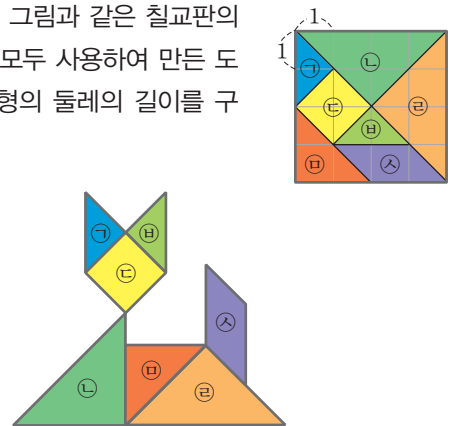
(1) $\sqrt{90}$

(2) $(\sqrt{15}-\sqrt{6})\div\sqrt{3}$

13

오른쪽 그림과 같은 사다리꼴의 넓이를 구하시오.

14

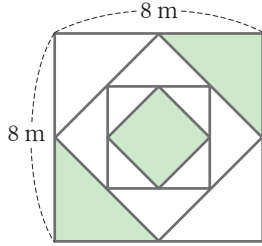
다음은 오른쪽 그림과 같은 칠교판의 7개의 조각을 모두 사용하여 만든 도형이다. 이 도형의 둘레의 길이를 구하시오.

15 서술형

$a=\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $b=2+\sqrt{3}$, $c=\sqrt{5}+2$일 때, a, b, c의 대소 관계를 부등호를 사용하여 나타내시오. (단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

문제 해결

창의 UP

16

어느 도시에서는 봄꽃 축제를 위하여 오른쪽 그림과 같이 정원을 꾸미려고 한다. 정원은 한 변의 길이가 8 m인 정사각형에 네 변의 중점을 연결한 정사각형을 연속해서 세 번 그린 모양이다. 색칠한 부분의 둘레를 따라 담장을 설치한다고 할 때, 담장 둘레의 길이의 합을 구하시오.

17

자연수 x에 대하여 $\sqrt{x}$보다 작은 자연수의 개수를 $f(x)$라고 할 때,

$$f(10)+f(11)+\cdots+f(20)$$

의 값을 구하시오.

18

$2<\sqrt{x}\le3$을 만족시키는 자연수 x의 개수는 5,
$3<\sqrt{x}\le4$를 만족시키는 자연수 x의 개수는 7,
$4<\sqrt{x}\le5$를 만족시키는 자연수 x의 개수는 9,
$5<\sqrt{x}\le6$을 만족시키는 자연수 x의 개수는 11,
⋮
이다. 위의 결과를 바탕으로 $n<\sqrt{x}\le n+1$을 만족시키는 자연수 x의 개수가 23일 때, n의 값을 구하시오.
(단, n은 자연수)

자기 평가

점검 항목		도달 정도		
		미흡	보통	우수
학습 내용	제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하였는가?			
	무리수의 개념을 이해하였는가?			
	근호를 포함한 식의 사칙계산을 할 수 있는가?			
	실수의 대소 관계를 이해하였는가?			
학습 태도	수업 시간에 성실히 참여하였는가?			
	문제를 풀 때 끈기 있게 도전하였는가?			
	복습과 예습을 꼼꼼히 하였는가?			
	친구의 의견을 존중하고 경청하였는가?			

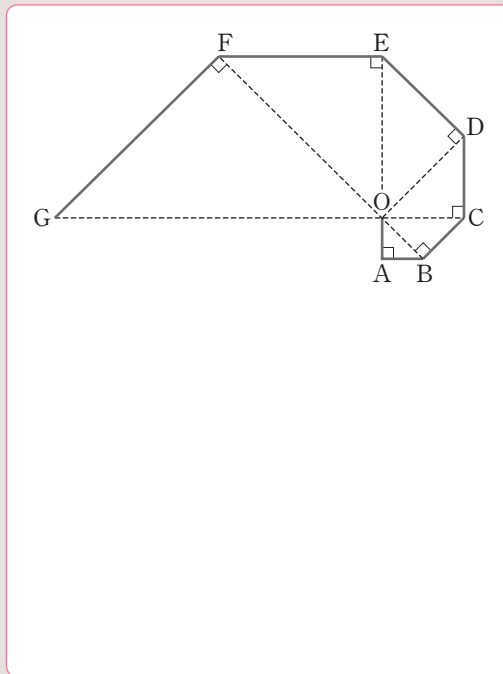
● 이 단원을 공부하면서 알게 된 점과 어려웠던 점은 무엇인지 써 보자.

창의+융합 프로젝트

나선형 디자인

수학+과학+미술

DNA 모형, 거미줄, 파인애플, 은하계는 모두 나선형이라는 기하적 특징을 갖고 있다. 나선형은 주로 고정된 점을 중심으로 회전하면서 멀어지는 점에 의해 그려지는 곡선 형태이다. 이 외에도 나선형에는 다양한 유형이 있으며, 여러 가지 수학적 방법으로 만들 수 있다. 제곱근의 성질을 이용하여 선분으로 이루어진 나선형 디자인을 만들어 보자.

과제 오른쪽 그림과 같은 나선형 디자인에서 △OAB, △OBC, △OCD, △ODE, △OEF, △OFG는 모두 직각이등변삼각형이다. 물음에 답해 보자.

1 주어진 나선형 디자인이 어떤 규칙에 의해 만들어지는지 말해 보자.

2 주어진 나선형 디자인에서 점을 나타내는 기호들이 O, A, B, C, D, E, F, G, ⋯ 순으로 나열될 때, **1**에서 찾은 규칙으로 $\overline{GH}$를 그려 보자.

3 $\overline{OA}=1$ cm일 때, 다음 표의 각 선분의 길이를 구해 보자.

선분	$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{CD}$	$\overline{DE}$	$\overline{EF}$	$\overline{FG}$
길이(cm)						

4 **2**에서 그린 그림에서 $\overline{HI}$를 연장하여 그릴 때, **3**의 표를 이용하여 $\overline{HI}$의 길이를 예측해 보자.

포트폴리오 평가

• 이 단원을 학습한 후 스스로 해결하기 및 단원 마무리 문제 해결, 자기 평가 작성, 창의+융합 프로젝트 과제 해결 등 모든 활동 결과를 확인하고 점검하였는가?